Il calcolo FK4 B1950.0 della precessione delle stelle

Mario Codebò

(Archeoastronomia Ligustica)

http://www.archaeoastronomy.it

info@archaeoastronomy.it

Si descrive qui l'algoritmo per il calcolo della *posizione apparente* di una stella ad una determinata data - in Archeoastronomia quasi sempre nel passato più o meno remoto - partendo dalle sue coordinate per un'epoca standard (per es. il 1900, il 1950, il 2000 o, prossimamente, il 2050)[1].

Tali coordinate sono:

1) l'ascensione retta α, comunemente espressa in unità sessagesimali del tempo (ore *h*, minuti *m* e secondi *s*);

2) la declinazione δ, espressa in unità di gradi sessagesimali di circonferenza (arcogradi °, arcoprimi ' e arcosecondi ");

3) il moto proprio in ascensione retta $mp\alpha$ espresso in secondi di tempo *s* per anno;

---

[1] Per *epoca standard* s'intende una data particolare nella quale vari parametri astronomici sono stati misurati direttamente (e non calcolati) e sono utilizzati nei calcoli come riferimento fisso da cui partire.

4) il moto proprio in declinazione *mpδ* in secondi di circonferenza " per anno.

Come vedremo fra poco, a queste quattro coordinate fondamentali si possono aggiungere, per ottenere una maggiore precisione di calcolo dei moti propri, le seguenti:

5) la distanza in parsec[2] *r*;

6) la velocità radiale *Δr* in parsec per anno col segno proprio + o -.

Queste coordinate si possono reperire sui cataloghi stellari, la maggior parte dei quali sono oggi rintracciabili su Internet. Uno, con note storiche, è visibile sul sito:

http://www.daviddarling.info/encyclopedia/A/astronomical_catalogues.html .

Il migliore servizio di banca-dati astronomici è sul sito http://cdsweb.u-strasbg.fr/ del Centre de Donées Astronomiques de Strasbourg. Da qui si può accedere ai tre servizi *Sinbad*, *VizieR* e *Aladin*, nonché ad un ricchissimo elenco di cataloghi e banche dati (http://vizier.u-strasbg.fr/cats/cats.html). Si tratta però di un sito non facilmente gestibile.

Due siti utili sono: quello dello United States Naval Observatory U.S.N.O. (http://ad.usno.navy.mil/star/) e quello dello Smithsonian Astrophysical Observatory S.A.O. (http://heasarc.gsfc.nasa.gov/W3Browse/star-catalog/sao.html, poi link a sinistra in alto: browse this table).

Un altro sito di facile consultazione è http://www.alcyone.de/SIT/bsc/index.html dove, nel Bright Star Catalogue 5th ed. 1991, si troverà l'elenco di tutte le 88 costellazioni in cui la International Astronomical Union I.A.U. suddivise il cielo nel 1933. Entrando in quella che interessa, si ottiene un elenco delle stelle, numerate secondo vari cataloghi, che ne fanno parte e cliccando sul numero all'estrema sinistra si apre una pagina con i link di alcuni di essi. Cliccando su quello dello S.A.O. si otterranno i parametri di quella particolare stella sia per il 2000 che per il 1950, mentre cliccando sugli altri si otterranno i parametri del 2000 e del 1900.

Nel calcolo della posizione di una stella si prendono in considerazione tre date (espresse in giorni giuliani delle effemeridi[3] *JD*):

1) la data di partenza, ossia la data a partire dalla quale si vogliono effettuare i calcoli (per es. la data odierna);

2) la data dell'epoca standard prescelta (B1900.0, B1950.0, J2000.0, J2050.0, ecc.);

3) la data di arrivo, ossia la data, più o meno lontana nel tempo, per la quale si vogliono calcolare le coordinate della stella.

---

[2] Parsec è un'unità di misura astronomica corrispondente alla distanza dalla quale la Terra ed il Sole apparirebbero separati da un angolo di 0°00'01". E' uguale a 3,2616 anni-luce, cioè km 0,0030857 * 10^{16} (Gribbin 1998, p. 368) ed a 206265 Unità Astronomiche UA (Smart 1977, p. 223). Una UA corrisponde alla lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita terrestre (Smart 1977, p. 101), ovvero (Gribbin 1998, p. 545) alla distanza media Terra-Sole nel corso dell'anno, pari a km 149.597.870.

[3] Com'è noto, la numerazione in giorni giuliani fu introdotta nel 1582 da Jean Joseph Scaligero. E' una sequenza ininterrotta di giorni a partire dalle ore 12:00:00 di Greenwich (*UT*) del 01/01/4713 a. C.. La specificazione "delle effemeridi" indica che si tratta di un tempo uniforme o dinamico *DT*, cioè scandito dagli orologi atomici e non soggetto alle variazioni del moto della Terra, come accade invece al tempo universale *UT*. Per una disamina dettagliata di questi argomenti si vedano Meeus 2005, capp. 7 e 10 e Pannunzio 2002.

La lettera B o J premessa all’anno indica che quest’ultimo è, rispettivamente, l’anno besseliano o l’anno giuliano. L’anno besseliano, utilizzato fino al 1984 e di lunghezza uguale all’anno tropico (pari a 365,2421988 giorni nel 1900 d. C., secondo Newcomb), incominciava nell’istante in cui la longitudine media del Sole, affetta dall’aberrazione (pari a -0°00’20,5”) e misurata dall’equinozio medio della data, era esattamente 280°00’00,00”. Tale istante è sempre molto vicino all’inizio dell’anno civile gregoriano. I cataloghi stellari relativi agli anni B1900.0 e B1950.0 appartengono al Fundamental Katalog 4 o FK4.

L’anno giuliano cominciò ad essere utilizzato a partire dal 1984 per decisione dell’International Astronomical Union UAI. Dura 365,25 giorni esatti e comincia sempre alle ore UT 12:00:00 del 01/01 di ciascun anno. I cataloghi stellari relativi all’anno J2000.0 appartengono al Fundamental Katalog 5 o FK5.

Lo 0 dopo il punto nella numerazione dell’anno indica l’inizio dell’anno stesso, sia che si tratti di anno besseliano che di anno giuliano. Espresse come sopra ed in giorni giuliani, le date d’inizio degli anni B1900.0, B1950.0, J2000.0 e J2050.0 sono, rispettivamente: JD 2415020,3135 (= 01/01/1900 UT 19:31:26); JD 2433282,4235 (= 01/01/1950 UT 22:09:50); JD 2451545,00 (= 01/01/2000 UT 12:00:00); JD 2469807,00 (= 01/01/2050 UT 12:00:00).

Oltre all’uso dell’anno besseliano o giuliano esistono altre differenze tra FK4 e FK5 ed è possibile utilizzare l’algoritmo di calcolo previsto per il sistema FK5 con le coordinate del sistema FK4 apportando tre correzioni (Meeus 2005, pp. 139-140).

In questo articolo prenderemo in considerazione le coordinate della sola epoca standard dell’anno B1950.0, che appartengono al Fundamental Katalog 4 o FK4.

Il metodo di seguito descritto è quello classico di Newcomb, preciso anche per distanze di tempo relativamente lunghe, ma comunque non utilizzabile per più di alcuni millenni dal presente (per es., dà risultati assolutamente errati per 30000 anni dal presente!).

Precessione degli equinozi e moto proprio danno la *posizione media* delle stelle.

Poiché invece in Archeoastronomia generalmente occorre conoscerne la *posizione apparente*, è necessario calcolare i seguenti altri effetti:

1) la nutazione;

2) l’aberrazione annua della luce;

3) la parallasse annua.

La nutazione è un piccolo movimento periodico dell’equatore celeste dovuto alla forza gravitazionale della Luna.

L’aberrazione annua è un fenomeno relativistico della luce che sposta l’immagine della stella.

La parallasse annua, sempre inferiore a 0°00’00,8” per tutte le stelle visibili ad occhio nudo tranne tredici (Meeus 1988 p. 72 e 2005, p. 150), può essere trascurata nei calcoli archeoastronomici.

Per la dettagliata descrizione di questi tre fenomeni si rinvia a Smart 1977, capp. VIII-X, ed a Zagar 1984, capp. VII-IX.

In conclusione, la procedura per calcolare le coordinate di una stella in un tempo diverso dall'attuale sono, nell'ordine di esecuzione, le seguenti:

1) calcolo del moto proprio;

2) calcolo della precessione;

3) calcolo della nutazione;

4) calcolo dell'aberrazione annua.

Di seguito si descrive l'algoritmo completo per l'epoca standard B1950.0 ed il sistema FK4 secondo Meeus 1988 e 1990, capp. 14, 15, 16 e 18 con alcune modifiche, rinviando ad altri prossimi lavori la descrizione degli algoritmi FK4 B1900.0 e FK5 J2000.0.

Presi dagli almanacchi cartacei o sul web α e δ della stella per il 1950, si trasformano in un'unica unità di misura, in genere in gradi sessagesimali moltiplicando per 15 la misura in tempo di α.

Poi si calcola la differenza di tempo T in secoli tropici tra la data di arrivo JD_0 e la data dell'epoca standard B1950.0:

$T = (JD_0 - 2433282{,}4235)$[4] $/ 36524{,}2199$[5].

Poi si calcolano le variazioni di α e δ per effetto dei moti propri. Per fare ciò innanzitutto si moltiplica la differenza di tempo T in secoli tropici per 100 e si ottiene la differenza di tempo in anni tropici, si moltiplica tale differenza di tempo in anni tropici per i moti propri della stella in α e δ e si sommano a questi prodotti i valori iniziali di α e δ dati dagli almanacchi per l'epoca standard del B1950.0:

$$\alpha_0 = \alpha + (T * 100) * mp\alpha$$

$$\delta_0 = \delta + (T * 100) * mp\delta.$$

Se gli almanacchi consultati riportano anche la distanza in parsec r e la velocità radiale Δr in parsec per anno[6] col segno proprio + o -, si possono calcolare con precisione maggiore,

[4] Questo è l'istante del giorno giuliano in cui comincia l'anno besseliano 1950, cioè B1950.0. Fino al 1984 i cataloghi stellari davano le posizioni delle stelle nelle epoche standard <u>all'inizio dell'anno besseliano</u>. L'anno besseliano inizia nell'istante in cui la longitudine media del Sole, affetta dall'aberrazione (pari a -20,5") e misurata dall'equinozio medio della data, è esattamente 280°00'00". Questo "istante" è sempre prossimo all'inizio dell'anno civile gregoriano (cioè al 01/01). La lunghezza dell'anno besseliano è uguale a quella dell'anno tropico: 365,2421988 giorni (Smart 1977, p. 132; Zagar 1984, p. 117). Nel 1900 la sua data d'inizio fu calcolata da Newcomb al 31/12/1899 UT 19h 31m 26,4s (cioè, espresso in giorni giuliani, JD 2415020,3135). Nel 1950 la data d'inizio dell'anno besseliano fu il 31/12/1949 UT 22h 09m 50,4s (cioè, espresso in giorni giuliani, 2433282,4235). Si rammenti che il giorno giuliano *JD* comincia sempre alle ore UT 12h 00m 00s e che quindi il segno, *0* posto dopo la cifra indicante il *JD* indica tale ora, mentre la mezzanotte - cioè 12 ore dopo l'inizio del *JD* - è indicata con il segno, *5*. Si rammenti infine che il primo giorno giuliano fu il 01/01/4713 a. C. UT 12h 00m 00s (JD 1,0) secondo Jean Joseph Scaligero che nel 1582 inventò (e dedicò a suo padre Julius Scaligerus) questa numerazione (detta *Periodo Giuliano*), tutt'oggi usatissima in astronomia, nel XVI secolo. Un Periodo Giuliano dura 7980 anni ed è formato da 2914695,0 JD perché è il prodotto di un ciclo lunare di 19 anni, di un ciclo solare di 28 anni e di un'indizione di 15 anni (19 * 28 * 15 = 7980). Secondo J. J. Scaligero l'inizio dei tre cicli coincise alla data del 01/01/4713 a. C.: per questo motivo egli la scelse come inizio del Periodo da lui creato. La sua comodità nel calcolo astronomico consiste nel fatto che è una sequenza ininterrotta di giorni indipendente dalla conversione reciproca delle date dei vari calendari, tale quindi da semplificare enormemente la datazione degli eventi.

[5] 36524,2199 sono i giorni, con frazioni di tempo, presenti in un secolo tropico.

[6] Questi parametri sono sempre dati nel sistema FK5, ma non nel sistema FK4.

soprattutto per notevoli distanze di tempo, gli effetti dei moti propri della stella, procedendo nel seguente modo[7]:

α = ascensione retta all'epoca iniziale

δ = declinazione all'epoca iniziale

r = distanza in parsec

Δr = velocità radiale in parsec all'anno

$mp\alpha_r$ = moto proprio α radianti all'anno

$mp\delta_r$ = moto proprio δ radianti all'anno

t = numero di anni dall'epoca di partenza a quella di arrivo, negativo nel passato e positivo nel futuro[8]

$x = r * \cos \delta * \cos a$

$y = r * \cos \delta * \text{sen } a$

$z = r * \text{sen } \delta$

$\Delta x = (x / r) * \Delta r - z * mp\delta_r * \cos \alpha - y * mp\alpha_r$

$\Delta y = (y / r) * \Delta r - z * mp\delta_r * \text{sen } \alpha + x * mp\alpha_r$

$\Delta z = (z / r) * \Delta r + r * mp\delta_r * \cos \delta$

$x_1 = x + t * \Delta x$

$y_1 = y + t * \Delta y$

$z_1 = z + t * \Delta z$

$\tan \alpha_0 = y_1 / x_1$

$\tan \delta_0 = z_1 / \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$.

Si procede poi a calcolare gli effetti della precessione, della nutazione e dell'aberrazione annua della luce come già descritto sopra.

Poi si calcola l'effetto della precessione degli equinozi con le formule rigorose di Newcomb:

---

[7] Di questo metodo non si dà qui un esempio numerico, che sarà invece dato in un futuro articolo descrivente il calcolo FK5 J2000.0.

[8] C'è differenza tra *T* e *t*: *T* è un *JD*, mentre *t* è un numero di anni.

ζ = 0°00’2304,948” * T + 0°00’00,302” * T^2 + 0°00’00,018” * T^3;

z = 0°00’2304,948” * T + 0°00’01,093” * T^2 + 0°00’00,019” * T^3;

θ = 0°00’2004,255” * T - 0°00’00,426” * T^2 - 0°00’00,042” * T^3.

Poi si calcolano:

$A = \cos \delta_0 * \sin (\alpha_0 + \zeta)$;

$B = \cos \theta * \cos \delta_0 * \cos (\alpha_0 + \zeta) - \sin \theta * \sin \delta_0$;

$C = \sin \theta * \cos \delta_0 * \cos (\alpha_0 + \zeta) + \cos \theta * \sin \delta_0$;

$\tan (\alpha_1 - z) = (A / B)$;

$\sin \delta_1 = C$.

Poiché la tangente di un angolo è la stessa rispettivamente nei quadranti I e III nonché II e IV, per calcolare tan (α_1 - z) e collocarla nel quadrante esatto si può procede in due modi:

1) se il denominatore di A / B è minore di 0 (B < 0) al risultato di A / B si aggiungono 180°; se invece esso è maggiore di 0 (B > 0) non si aggiunge nulla e il risultato è già la tangente nell’angolo corretto;

2) si calcolano le coordinate polari di B / A (occorre invertire i fattori rispetto alla formula originaria A / B), ottenendone due risultati, il secondo dei quali è quello cercato. Le calcolatrici scientifiche hanno un apposito tasto che trasforma le coordinate rettangolari in polari: pol (B; A) e due specifiche memorie dove sono immagazzinati i due risultati[9]. Se tale secondo risultato fosse negativo, lo si somma algebricamente a 360°, ottenendo così il corretto valore positivo.

Es.:

1a) tan (α_1 - z) = 1,0405017 / -0,4315299 = -67,47462466 + 180° = 112,5253753° = 112°31’31,3”;

1b) tan (α_1 - z) = 1,0405017 / -0,4315299 = pol (-0,4315299; 1,0405017) = 112,5253753° = 112°31’31,3”;

2a) tan (α_1 - z) = 2,456 / 1,852 = 52,98108896° = 52°58’51,92”;

2b) tan (α_1 - z) = pol (1,852; 2,456) = 52,98108896° = 52°58’51,92”.

Il risultato di tan (α_1 - z) si aggiunge a *z* che è già noto. Il risultato è l’ascensione retta cercata.

Invece il calcolo sin δ_1 = C non richiede alcuna trasformazione, essendo il risultato già la declinazione cercata.

Si ottengono così l’ascensione retta α_1 e la declinazione δ_1 corrette per i moti propri e per la precessione degli equinozi.

a) [9] Es.: arctan [(-0,177544568207 / -0,983403711782)]° + 180° = 190,233988273;
Es.: pol (-0,983403711782; -0,177544568207) = r 0,999302223577; θ -169,766011727;
360° + -169,766011727 = 190,233988273.

Ora si calcola l'effetto della nutazione.

Ottenuta la differenza di tempo in secoli giuliani dal 1950 con la formula

$T = (JD - 2415020{,}0) / 36525$[10]

si calcolano i seguenti parametri:

1) longitudine media del Sole $L = 279{,}6967° + 36000{,}7689° * T + 0{,}000303° * T^2$;

2) longitudine media della Luna $L_1 = 270{,}4342° + 481267{,}8831° * T - 0{,}001133° * T^2$;

3) anomalia media del Sole $M = 358{,}4758° + 35999{,}0498° * T - 0{,}000150° * T^2$;

4) anomalia media della Luna $M_1 = 296{,}1046° + 477198{,}8491° * T + 0{,}009192° * T^2$;

5) longitudine del nodo ascendente della Luna $\Omega = 259{,}1833° - 1934{,}1420° * T + 0{,}002078° * T^2$.

Ora si calcolano i valori della nutazione in longitudine $\Delta\psi$ e della nutazione in obliquità $\Delta\varepsilon$, i cui coefficienti sono qui scritti, per risparmio di spazio, in secondi sessagesimali con decimali (e nel calcolo devono essere scritti in forma completa; per es.: 0,01737" = 0°00'00,01737"):

$\Delta\psi = - (17{,}2327" + 0{,}01737" * T) * \text{sen } \Omega - (1{,}2729" + 0{,}00013" * T) * \text{sen } (2L) + 0{,}2088" * \text{sen } (2\Omega) - 0{,}2037" * \text{sen } (2L_1) + (0{,}1261" - 0{,}00031" * T) * \text{sen } M + 0{,}0675" * \text{sen } M_1 - (0{,}0497" - 0{,}00012" * T) * \text{sen } (2L + M) - 0{,}0342" * \text{sen } (2L_1 - \Omega) - 0{,}0261" * \text{sen } (2L_1 + M_1) + 0{,}0214" * \text{sen } (2L - M) - 0{,}0149" * \text{sen } (2L - 2L_1 + M_1) + 0{,}0124" * \text{sen } (2L - \Omega) + 0{,}0114" * \text{sen } (2L_1 - M_1)$

$\Delta\varepsilon = + (9{,}21" + 0{,}00091" * T) * \cos \Omega + (0{,}5522" - 0{,}00029" * T) * \cos (2L) - 0{,}0904" * \cos (2\Omega) + 0{,}0884" * \cos 2L_1 + 0{,}0216" * \cos (2L + M) + 0{,}0183" * \cos (2L_1 - \Omega) + 0{,}0113" * \cos (2L_1 + M_1) - 0{,}0093" * \cos (2L - M) - 0{,}0066" * \cos (2L - \Omega)$.

Ora si calcolano le variazioni in ascensione retta α_2 e in declinazione δ_2 per effetto della nutazione. Per fare ciò è necessario prima calcolare l'obliquità dell'eclittica ε con la formula di Laskar:

$U = T / 100$

$\varepsilon = 23°26'21{,}448" - 0°00'4680{,}93" * (T / 100) - 0°00'01{,}55" * (T / 100)^2 + 0°00'1999{,}25" * (T / 100)^3 - 0°00'51{,}38" * (T / 100)^4 - 0°00'249{,}67" * (T / 100)^5 - 0°00'39{,}05" * (T / 100)^6 +$

[10] Si noterà la differenza del giorno giuliano di riferimento in questa formula ed in quella, analoga, usata per il calcolo della precessione vera a p. 3: là si è usato il giorno giuliano 2433282,4235 e qui il giorno giuliano 2415020,0. Questa differenza è data dal fatto che nella formula della precessione vera si parte dalla data del 01/01/1950, mentre in quella della nutazione dalla data 01/01/1900. Ciò introduce un piccolo errore che però, essendo minimo l'effetto della nutazione, può essere per i nostri scopi trascurato. Per una maggiore correttezza occorrerebbe calcolare anche la nutazione dalla data del 01/01/1950, ma Meeus non la fornisce nelle sue pubblicazioni; anzi, nei suoi esempi, egli utilizza senza esitazione la precessione vera calcolata dal 1950 e la nutazione dal 1900 (cfr. Meeus 1988, esempi 14b e 15a rispettivamente alle pp. 66-67 e 70 e Meeus 1990 , esempi 14.2 e 15.1 rispettivamente alle pp. 64-65 e 68. L'apparente incongruenza è causata dal fatto che io descrivo, per semplicità, questo calcolo come partente dal 1950, mentre in effetti l'algoritmo originariamente descritto da Newcomb parte dal 1900 e risale poi alle altre date, compreso il 1950. Per maggiore chiarezza dei lettori, cercherò di presentare ad un prossimo congresso ALSSA l'intero algoritmo originale di Newcomb. Inoltre, la differenza tra 36524,2199 e 36525 è dovuta al fatto che i primi sono i giorni presenti in un secolo tropico, come già detto alla nota n. 5 ed i secondi sono i giorni presenti in un secolo giuliano.

0°00’07,12” * (T / 100)^7 + 0°00’27,87” * (T / 100)^8 + 0°00’05,79” * (T / 100)^9 + 0°00’02,45” * (T / 100)^{10}

poi si risolvono le seguenti formule:

α_2 = (cos ε + sen ε * sen α_1 * tan δ_1) * Δψ - (cos α_1 * tan δ_1) * Δε

δ_2 = (sen ε * cos α_1) * Δψ + (sen α_1) * Δε.

Ora si calcola longitudine vera del Sole (dal 01/01/1900 UT 12:00:00):

T = (JD - 2415020,0) / 36525[11]

1) longitudine media geometrica del Sole L = 279,69668° + 36000,76892° * T + 0,0003025° * T²;

2) anomalia media del Sole M = 358,47583° + 35999,04975° * T - 0,00015 * T² - 0,0000033° * T³;[12]

3) equazione del centro del Sole C = + (1,91946° - 0,004789° * T - 0,000014° * T²) * sen M + (0,020094° - 0,0001° * T) * sen (2M) + 0,000293° * sen (3M);

4) longitudine vera del Sole L_v = L + C.

Ora si calcolano le variazioni in ascensione retta $\Delta\alpha_3$ e declinazione $\Delta\delta_3$ per effetto dell’aberrazione annua della luce (*ε* è ancora l’obliquità dell’eclittica calcolata con la formula di Laskar):
α_3= -0°00’20,49” * [(cos α_1 * cos L_1 * cos ε + sen α_1 * sen L_1) / cos δ_1]

δ_3 = -0°00’20,49” * [cos L_1 * cos ε * (tan ε * cos δ_1 - sen α_1 * sen δ_1) + cos α_1 * sen δ_1 * sen L_1].

Ora si hanno tutti i parametri necessari per calcolare la *posizione apparente* della stella α_4 e δ_4 all’epoca voluta sommando algebricamente le correzioni, rispettivamente:

$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$\delta_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$.

[11] Cfr. nota n. 10, ultimo capoverso.

[12] I lettori noteranno in questi calcoli della longitudine vera del Sole alcune differenze con le identiche formule usate per calcolare la nutazione. Queste differenze riguardano la quarta e la quinta cifra decimale dei coefficienti numerici. Ciò è dovuto al fatto che, come dice espressamente Meeus, il calcolo della longitudine vera del Sole per la posizione apparente delle stelle va effettuato con un numero maggiore di decimali rispetto al calcolo della longitudine media usato per il calcolo della nutazione. In generale si tenga presente che i calcoli astronomici vanno eseguiti con un elevato numero di decimali, pena una precisione insufficiente nei risultati, e gli eventuali arrotondamenti vanno fatti *sul risultato finale dei calcoli*. Nel suo libro *Astronomical Algorithms* Meeus dedica l’intero secondo capitolo all’accuratezza da usare nei calcoli. Il problema non è posto soltanto dalle formule, ma anche dalle macchine di calcolo usate: non sempre quest’ultime eseguono i calcoli con una precisione sufficiente, a causa degli arrotondamenti che i software impongono loro. E’ bene dunque verificare l’accuratezza degli arrotondamenti dei calcolatori usati, come descritto nel citato cap. II di Meeus 2005 (in cui sono date anche procedure di verifica cui sottoporre i calcolatori usati), ed eseguire i calcoli con il massimo dei decimali *significativi* consentiti. Attenzione però:

a) alla differenza che corre tra il numero dei decimali della mantissa usata per i calcoli e quello dei decimali visualizzati sul display: è il numero dei decimali usato dalla mantissa del calcolatore che deve essere massimo (oltre 10 decimali)! Un calcolatore che esegua calcoli con una mantissa di 5-6 decimali soltanto non è sufficiente;

b) alla differenza che corre tra numero di decimali e numero di decimali *significativi*, cioè diversi da 0. Un calcolatore che esegua calcoli con una mantissa di soli 6-8 decimali significativi non è sufficiente.

ESEMPIO NUMERICO

Si vuole calcolare la *posizione apparente* di Spica (*α Virginis*) all'equinozio di primavera del 350 d. C..

Con uno dei metodi descritti in Meeus 1990, cap. 20, od in Meeus 2005, cap. 27 si calcola la data dell'equinozio di primavera dell'anno 350 d. C., corrispondente al 20/03/350 d. C. ore 13h 00m 17s UT.

Dal sito http://www.alcyone.de/SIT/bsc/index.html si ricava che le coordinate di Spica nel 1950.0, secondo il catalogo S.A.O., sono:

α = 13h 22m 33,301s

δ = -10°54'03,36"

mpα = -0h 00m 00,0029s

mpδ = -0°00'00,033".

Poiché l'ascensione retta α è data in unità di tempo, la si riduce a gradi sessagesimali moltiplicandola per 15:

α 13h 22m 33,301s * 15 = 200°38'19,51".

Col metodo descritto in Meeus 1990, cap. 3, Meeus 2005, cap. 7, e Codebò 2010, si calcola il giorno giuliano *JD* del 20/03/350 d. C.: ore 13h 00,28m ottenendo JD 1848974,04186.

Poi si calcola:
T = (1848974,04186 - 2433282,4235) / 36524,2199 = -15,9978333073
$\alpha_0 = \alpha + [(T * 100) * mp\alpha]$ = 200,658084882
$\delta_0 = \delta + [(T * 100) * mp\delta]$ = -10,8862686528
ζ = 0°00'2304,948" * T + 0°00'00,302" * T^2 + 0°00'00,018" * T^3 = -10,2418280209
z = 0°00'2304,948" * T + 0°00'01,093" * T^2 + 0°00'00,019" * T^3 = -10,1867316808
θ = 0°00'2004,255" * T - 0°00'00,426" * T^2 - 0°00'00,042" * T^3 = -8,88911159455
$A = \cos \delta_0 * \sin (\alpha_0 + \zeta)$ = -0,177544568207
$B = \cos \theta * \cos \delta_0 * \cos (\alpha_0 + \zeta) - \sin \theta * \sin \delta_0$ = -0,983403711782
$C = \sin \theta * \cos \delta_0 * \cos (\alpha_0 + \zeta) + \cos \theta * \sin \delta_0$ = -0,0373505816924
$\tan (\alpha_1 - z)$ = 180,047256593
$\sin \delta_1 = C$ = -2,14052858662
α_1 = 180,047256593
δ_1 = -2,14052858662
T = (JD - 2415020,0) / 36525 = -15,4974937205
L = 279,6967° + 36000,7689° * T + 0,000303° * T^2 = -557641,920487
L_1 = 270,4342° + 481267,8831° * T - 0,001133° * T^2 = -7458175,83412
M = 358,4758° + 35999,0498° * T - 0,000150° * T^2 = -557536,608444
M_1 = 296,1046° + 477198,8491° * T + 0,009192° * T^2 = -7395087,85508
Ω = 259,1833° - 1934,1420° * T + 0,002078° * T^2 = 30234,0358776
$\Delta\psi$ = - (17,2327" + 0,01737" * T) * sen Ω - (1,2729" + 0,00013" * T) * sen (2L) + 0,2088" * sen (2Ω) - 0,2037" * sen (2L_1) + (0,1261" - 0,00031" * T) * sen M + 0,0675" * sen M_1 - (0,0497" - 0,00012" * T) * sen (2L + M) - 0,0342" * sen (2L_1 - Ω) - 0,0261" * sen (2L_1 + M_1) + 0,0214" * sen (2L - M) - 0,0149" * sen (2L - 2L_1 + M_1) + 0,0124" * sen (2L - Ω) + 0,0114" * sen (2L_1 - M_1) = 0,0005968330633
$\Delta\varepsilon$ = + (9,21" + 0,00091" * T) * cos Ω + (0,5522" - 0,00029" * T) * cos (2L) - 0,0904" * cos (2Ω) + 0,0884" * cos 2L_1 + 0,0216" * cos (2L + M) + 0,0183" * cos (2L_1 - Ω) + 0,0113" * cos (2L_1 + M_1) - 0,0093" * cos (2L - M) - 0,0066" * cos (2L - Ω) = 0,0026583762126

$U = T / 100 = -0{,}154974937205$
$\varepsilon = 23°26'21{,}448'' - 0°00'4680{,}93'' * (T / 100) - 0°00'01{,}55'' * (T / 100)^2 + 0°00'1999{,}25'' * (T / 100)^3 - 0°00'51{,}38'' * (T / 100)^4 - 0°00'249{,}67'' * (T / 100)^5 - 0°00'39{,}05'' * (T / 100)^6 + 0°00'07{,}12'' * (T / 100)^7 + 0°00'27{,}87'' * (T / 100)^8 + 0°00'05{,}79'' * (T / 100)^9 + 0°00'02{,}45'' * (T / 100)^{10} = 23{,}6387189984$
$\alpha_2 = (\cos \varepsilon + \text{sen } \varepsilon * \text{sen } \alpha_1 * \tan \delta_1) * \Delta\psi - (\cos \alpha_1 * \tan \delta_1) * \Delta\varepsilon = 0{,}0000838428716$
$\delta_2 = (\text{sen } \varepsilon * \cos \alpha_1) * \Delta\psi + (\text{sen } \alpha_1) * \Delta\varepsilon = -0{,}001161078902$
$L = 279{,}69668° + 36000{,}76892° * T + 0{,}0003025° * T^2 = -557641{,}920938$
$M = 358{,}47583° + 35999{,}04975° * T - 0{,}00015 * T^2 - 0{,}0000033° * T^3 = -557536{,}595356$
$C = + (1{,}91946° - 0{,}004789° * T - 0{,}000014° * T^2) * \text{sen } M + (0{,}020094° - 0{,}0001° * T) * \text{sen } (2M) + 0{,}000293° * \text{sen } (3M) = 1{,}92610755743$
$L_v = L + C = -557639{,}99483$
$\alpha_3 = -0°00'20{,}49'' * [(\cos \alpha_1 * \cos L_1 * \cos \varepsilon + \text{sen } \alpha_1 * \text{sen } L_1) / \cos \delta_1] = 0{,}0049692578286$
$\delta_3 = -0°00'20{,}49'' * [\cos L_1 * \cos \varepsilon * (\tan \varepsilon * \cos \delta_1 - \text{sen } \alpha_1 * \text{sen } \delta_1) + \cos \alpha_1 * \text{sen } \delta_1 * \text{sen } L_1] = -0{,}0018935084802$
$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180{,}052309739° = 12h\ 00m\ 12{,}55s$
$\delta_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2{,}14358305789° = -2°08'36{,}9''$.

Risulta quindi che Spica in data 20/03/350 d. C., alle ore 13h 00m 17s UT, aveva la *posizione apparente* α_4 12h 00m 12,55s e δ_4 -2°08'36,9".

ALTRI ESEMPI NUMERICI

1) calcolare le coordinate equatoriali di *β Tauri* al mezzogiorno del 01/01/4061 a. C. JD 238143,0

α 1950 = 5h 23m 07,71s

δ 1950 = 26°34'01,74"

mpα = 0,0019s

mpδ = -0,175"

α_4 01/01/4061 a. C. = 23h 50m 53,37s

δ_4 01/01/4061 a. C. = 2°10'48,9"

2) calcolare le coordinate equatoriali di *ζ Tauri* al mezzogiorno del 01/01/4061 a. C. JD 238143,0

α 1950 = 5h 34m 39,263s

δ 1950 = 21°06'50"

mpα = 0,0001s

mpδ = -0,022"

α_4 01/01/4061 a. C. = 0h 08m 58,93s

δ_4 01/01/4061 a. C. = -2°12'36,4"

3) calcolare le coordinate equatoriali di *α Ophiuchi* (*Ras al Hague*) al mezzogiorno del 01/01/3000 a. C. JD 625674,0

α 1950 = 17h 32m 36,696s

δ 1950 = 12°35’41,92”

mpα = 0,008s

mpδ = -0,227”

α_4 01/01/3000 a. C. = 13h 50m 25,08s

δ_4 01/01/3000 a. C. = 28°16’08,29”.

ALGORITMO SINTETICO

Di seguito viene dato l’intero algoritmo con le due varianti di calcolo degli effetti del moto proprio delle stelle.

1) CALCOLO DEI MOTI PROPRI

1.1) Metodo tradizionale

$T = (JD_0 - 2433282{,}4235) / 36524{,}2199$

$\alpha_0 = \alpha + [(T * 100) * mp\alpha]$

$\delta_0 = \delta + [(T * 100) * mp\delta]$

1.2) Metodo della velocità radiale

α = ascensione retta all’epoca iniziale

δ = declinazione all’epoca iniziale

r = distanza in parsec

Δr = velocità radiale in parsec all’anno

$mp\alpha_r$ = moto proprio *α* radianti all’anno

$mp\delta_r$ = moto proprio *δ* radianti all’anno

t = numero di anni dall’epoca di partenza a quella di arrivo, negativo nel passato e positivo nel futuro

$x = r * \cos \delta * \cos a$

$y = r * \cos \delta * \text{sen } a$

$z = r * \text{sen } \delta$

$\Delta x = (x / r) * \Delta r - z * mp\delta_r * \cos\alpha - y * mp\alpha_r$

$\Delta y = (y / r) * \Delta r - z * mp\delta_r * \text{sen}\,\alpha + x * mp\alpha_r$

$\Delta z = (z / r) * \Delta r + r * mp\delta_r * \cos\delta$

$x_1 = x + t * \Delta x$

$y_1 = y + t * \Delta y$

$z_1 = z + t * \Delta z$

$\tan\alpha_0 = y_1 / x_1$

$\tan\delta_0 = z_1 / \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$

2) CALCOLO DELLA PRECESSIONE (POSIZIONE VERA)

$\zeta = 0°00'2304{,}948'' * T + 0°00'00{,}302'' * T^2 + 0°00'00{,}018'' * T^3$

$z = 0°00'2304{,}948'' * T + 0°00'01{,}093'' * T^2 + 0°00'00{,}019'' * T^3$

$\theta = 0°00'2004{,}255'' * T - 0°00'00{,}426'' * T^2 - 0°00'00{,}042'' * T^3$

$A = \cos\delta_0 * \sin(\alpha_0 + \zeta)$

$B = \cos\theta * \cos\delta_0 * \cos(\alpha_0 + \zeta) - \sin\theta * \sin\delta_0$

$C = \sin\theta * \cos\delta_0 * \cos(\alpha_0 + \zeta) + \cos\theta * \sin\delta_0$

$\tan(\alpha_1 - z) = (A / B)$

$\sin\delta_1 = C$

3) CALCOLO DELLA NUTAZIONE

$T = (JD - 2415020{,}0) / 36525$

$L = 279{,}6967° + 36000{,}7689° * T + 0{,}000303° * T^2$

$L_1 = 270{,}4342° + 481267{,}8831° * T - 0{,}001133° * T^2$

$M = 358{,}4758° + 35999{,}0498° * T - 0{,}000150° * T^2$

$M_1 = 296{,}1046° + 477198{,}8491° * T + 0{,}009192° * T^2$

$\Omega = 259{,}1833° - 1934{,}1420° * T + 0{,}002078° * T^2$

$\Delta\psi$ = - (17,2327" + 0,01737" * T) * sen Ω - (1,2729" + 0,00013" * T) * sen (2L) + 0,2088" * sen (2Ω) - 0,2037" * sen (2L_1) + (0,1261" - 0,00031" * T) * sen M + 0,0675" * sen M_1 - (0,0497" - 0,00012" * T) * sen (2L + M) - 0,0342" * sen (2L_1 - Ω) - 0,0261" * sen (2L_1 + M_1) + 0,0214" * sen (2L - M) - 0,0149" * sen (2L - 2L_1 + M_1) + 0,0124" * sen (2L - Ω) + 0,0114" * sen (2L_1 - M_1)

$\Delta\varepsilon$ = + (9,21" + 0,00091" * T) * cos Ω + (0,5522" - 0,00029" * T) * cos (2L) - 0,0904" * cos (2Ω) + 0,0884" * cos 2L_1 + 0,0216" * cos (2L + M) + 0,0183" * cos (2L_1 - Ω) + 0,0113" * cos (2L_1 + M_1) - 0,0093" * cos (2L - M) - 0,0066" * cos (2L - Ω)

U = T / 100

ε = 23°26'21,448" - 0°00'4680,93" * (T / 100) - 0°00'01,55" * $(T / 100)^2$ + 0°00'1999,25" * $(T / 100)^3$ - 0°00'51,38" * $(T / 100)^4$ - 0°00'249,67" * $(T / 100)^5$ - 0°00'39,05" * $(T / 100)^6$ + 0°00'07,12" * $(T / 100)^7$ + 0°00'27,87" * $(T / 100)^8$ + 0°00'05,79" * $(T / 100)^9$ + 0°00'02,45" * $(T / 100)^{10}$

α_2 = (cos ε + sen ε * sen α_1 * tan δ_1) * $\Delta\psi$ - (cos α_1 * tan δ_1) * $\Delta\varepsilon$

δ_2 = (sen ε * cos α_1) * $\Delta\psi$ + (sen α_1) * $\Delta\varepsilon$

4) CALCOLO DELL'ABERRAZIONE ANNUA DELLA LUCE

T = (JD - 2415020,0) / 36525

*L = 279,69668° + 36000,76892° * T + 0,0003025° * T^2*

M = 358,47583° + 35999,04975° * T - 0,00015 * T^2 - 0,0000033° * T^3

C = + (1,91946° - 0,004789° * T - 0,000014° * T^2) * sen M + (0,020094° - 0,0001° * T) * sen (2M) + 0,000293° * sen (3M)

L_v = L + C

α_3= -0°00'20,49" * [(cos α_1 * cos L_1 * cos ε + sen α_1 * sen L_1) / cos δ_1]

δ_3 = -0°00'20,49" * [cos L_1 * cos ε * (tan ε * cos δ_1 - sen α_1 * sen δ_1) + cos α_1 * sen δ_1*sen L_1]

5) CALCOLO DELLA POSIZIONE APPARENTE

$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$\delta_4 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

<u>FK4 B1950.0 PROGRAMMATO PER LA CALCOLATRICE CASIO FX 9700GE</u>

STELLE1950

```
?→T:?→X:?→Y:?→A:?→B
((T-2433282.4235)⌟36524.2199):Ans→Z[1]
X+A×(Z[1]×100):Ans→Z[2]
Y+B×(Z[1]×100):Ans→Z[3]
0°00°2304.948°Z[1]+0°00°00.302°(Z[1])²+0°00°00.018°(Z[1])^3:Ans→Z[4]
0°00°2304.948°Z[1]+0°00°01.093°(Z[1])²+0°00°00.019°(Z[1])^3:Ans→Z[5]
0°00°2004.255°Z[1]-0°00°00.426°(Z[1])²-0°00°00.042°(Z[1])^3:Ans→Z[6]
cos Z[3]sin (Z[2]+Z[4]):Ans→Z[7]
cos Z[6]cos Z[3]cos (Z[2]+Z[4])-sin Z[6]sin Z[3]:Ans→Z[8]
sin Z[6]cos Z[3]cos (Z[2]+Z[4])+cos Z[6]sin Z[3]:Ans→Z[9]
tan⁻¹ (Z[7]÷Z[8]):Ans→Z[40]
Z[8]<0⇒Z[40]+180:Ans→Z[40]
Z[40]+Z[5]:Ans→Z[10]
sin⁻¹ Z[9]:Ans→Z[11]
(T-2415020.000)⌟36525.0000:Ans→Z[12]
279.6967+36000.7689Z[12]+0.000303(Z[12])²:Ans→Z[13]
270.4342+481267.8831Z[12]-0.001133(Z[12])²:Ans→Z[14]
358.4758+35999.0498Z[12]-0.000150(Z[12])²:Ans→Z[15]
296.1046+477198.8491Z[12]+0.009192(Z[12])²:Ans→Z[16]
259.1833-1934.1420Z[12]+0.002078(Z[12])²:Ans→Z[17]
-(0°00°17.2327°+0°00°00.01737°Z[12])sin Z[17]-(0°00°01.2729°+0°00°00.00013°Z[12])sin (2Z[13]
)+0°00°00.2088°sin (2Z[17])-0°00°00.2037°sin (2Z[14])+(0°00°00.1261°-0°00°00.00031°Z[12])sin
 Z[15]+0°00°00.0675°sin Z[16]-(0°00°00.0497°-0°00°00.00012°Z[12])sin (2Z[14]+Z[15]-0°00°00.0
342°sin (2Z[14])-Z[17])-0°00°00.0261°sin (2Z[14]+Z[16])+0°00°00.0214°sin (2Z[13]-Z[15])-0°00
°00.0149°sin (2Z[13]-2Z[14]+Z[16])+0°00°00.0124°sin (2Z[13]-Z[17])+0°00°00.0114°sin (2Z[14]-
Z[16]):Ans→Z[18]
+(0°00°09.21°+0°00°00.00091°Z[12])cos Z[17]+(0°00°00.5522°-0°00°00.00029°Z[12])cos (2Z[13])-
0°00°00.0904°cos (2Z[17])+0°00°00.0884°cos (2Z[14])+0°00°00.0216°cos (2Z[13]+Z[15])+0°00°00.
0183°cos (2Z[14]-Z[17])+0°00°00.0113°cos (2Z[14]+Z[16])-0°00°00.0093°cos (2Z[13]-Z[15])-0°00
°00.0066°cos (2Z[13]-Z[17]):Ans→Z[19]
Z[12]⌟100:Ans→Z[20]
23°26°21.448°-0°00°4680.93°Z[20]-0°00°01.55°(Z[20])²+0°00°1999.25°(Z[20])^3-0°00°51.38°(Z[20
])^4-0°00°249.67°(Z[20])^5-0°00°39.05°(Z[20])^6+0°00°07.12°(Z[20])^7+0°00°27.87°(Z[20])^8+0°
00°05.79°(Z[20])^9+0°00°02.45°(Z[20])^10:Ans→Z[21]
279.69668°+36000.76892°Z[12]+0.0003025°(Z[12])²:Ans→Z[22]
358.47583°+35999.04975°Z[12]-0.00015°(Z[12])²-0.0000033°(Z[12])^3:Ans→Z[23]
(1.919460°-0.004789°Z[12]-0.000014°(Z[12])²)sin Z[23]+(0.020094°-0.0001°Z[12])sin (2Z[23])+0
.000293°sin (3Z[23]):Ans→Z[24]
Z[22]+Z[24]:Ans→Z[25]
153.23°+22518.7541°Z[12]:Ans→Z[26]
216.57°+45037.5082°Z[12]:Ans→Z[27]
312.69°+32964.3577°Z[12]:Ans→Z[28]
350.74°+445267.1142°Z[12]-0.00144°(Z[12])²:Ans→Z[29]
231.19°+20.20°Z[12]:Ans→Z[30]
Z[25]+0.00134°cos Z[26]+0.00154°cos Z[27]+0.0002°cos Z[28]+0.00179°sin Z[29]+0.00178°sin Z[3
0]:Ans→Z[31]
360Int (Z[31]÷360):Ans→Z[32]
Z[31]-Z[32]:Ans→Z[33]
-0°00°20.49°×((cos Xcos Z[33]cos Z[21]+sin Xsin Z[33])⌟cos Y):Ans→Z[34]
-0°00°20.49°(cos Z[33]cos Z[21](tan Z[21]cos Y-sin Xsin Y)+cos Xsin Ysin Z[33]):Ans→Z[35]
(cos Z[21]+sin Z[21]sin Xtan Y)Z[18]-(cos Xtan Y)Z[19]:Ans→Z[36]
(sin Z[21]cos X)Z[18]+sin X×Z[19]:Ans→Z[37]
Z[10]+Z[34]+Z[36]◢
Ans÷15:Ans→Z[39]◢
Z[39]<0⇒24+Z[39]◢
Z[11]+Z[35]+Z[37]◢
```

Ringraziamenti

Ringrazio caldamente la dott.ssa Elena Salvo per la puntuale e ripetuta correzione delle bozze e tutti coloro che hanno contribuito in qualsiasi modo alla stesura ed alla pubblicazione di questo articolo.

Bibliografia

Codebò, Mario (2010), *L'algoritmo giuliano del Sole (metodo JD)*, Atti del XII Seminario A.L.S.S.A. di Archeoastronomia.

Gribbin John (1998), *Enciclopedia di Astronomia e Cosmologia*, Garzanti.

Meeus Jean (1988), *Astronomical Formulae for Calculators*, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, USA.

Meeus Jean (1990), *Astronomia con il Computer*, Hoepli, Milano.

Meeus Jean (2005), *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, USA.

Pannunzio Renato (2002), *Moti Propri della Terra e Scale di Tempo nell'Astronomia Moderna*, INAF-Osservatorio Astronomico di Torino, Pino Torinese (TO).

Smart William Marshall (1977), *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Zagar Francesco (1984), *Astronomia Sferica e Teorica*, Zanichelli, Bologna.